

Les graphes

I. Introduction

Exemple N1

On veut représenter un parcours de santé comportant 5 activités.

On peut passer de l'activité 1 aux activités 2, 4, 5.

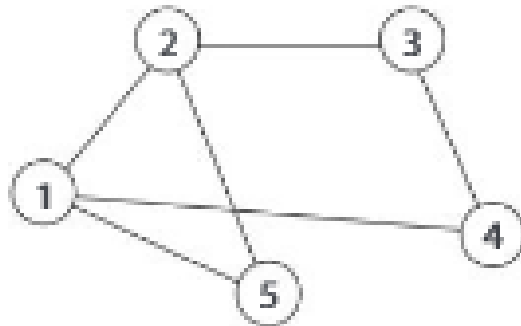
On peut passer de l'activité 2 aux activités 1, 3, 5.

On peut passer de l'activité 3 aux activités 2, 4.

On peut passer de l'activité 4 aux activités 1, 3.

On peut passer de l'activité 5 aux activités 1, 2.

Steevie souhaite passer une seule fois par chaque activité. Donner un parcours possible
Ken lui veut emprunter une fois et une seul fois chaque chemin. Donner un parcours possible.



Un tel schéma est appelé un **graphe**.

Un graphe est un ensemble de sommets (on parle aussi de nœuds) reliés par des arêtes.

Deux sommets reliés par une arête sont dits adjacents.

Une arête est une boucle si elle relie un sommet à lui-même.

Un graphe peut être orienté ou non. Ici, il n'est pas orienté.

Exemple N2

Le réseau social.

Cinq amis, A, B, C, D et E sont connectés au même réseau social.

A est ami avec tout le monde

B avec A et E

C avec A et D

D avec A et C

E avec A et B

1/ Représenter les relations d'amitié à l'aide d'un graphe

On peut représenter les relations entre les amis à l'aide d'un tableau. 0 s'il n'y a pas de relation, 1 sinon.

Un tel tableau est appelé **matrice d'adjacence**

On obtient ici :

```
0 1 1 1 1
1 0 0 0 1
1 0 0 1 0
1 0 1 0 0
1 1 0 0 0
```

Comment interprète-t-on une telle matrice ?

On peut considérer le tableau suivant :

```
  A B C D E
A 0 1 1 1 1
B 1 0 0 0 1
C 1 0 0 1 0
D 1 0 1 0 0
E 1 1 0 0 0
```

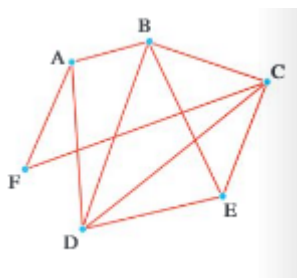
Le 1 rouge signifie que B est ami avec E.

Le 0 orange signifie que D n'est pas ami avec E

On notera que cette matrice est symétrique par rapport à sa diagonale (en vert)

Exercices

1.



Voici le plan d'un quartier, les lettres symbolisant les intersections entre différentes rues.

1. Donner le nombre de sommets, d'arêtes.
2. Donner la liste des sommets adjacents à A.
3. Etablir la matrice d'adjacence relative à ce graphe.

2.

```
0 1 0 1 1
1 0 1 0 1
0 1 0 1 0
1 0 1 0 0
1 1 0 0 0
```

Réaliser un graphe traduisant cette matrice d'adjacence.

II. Graphes orientés

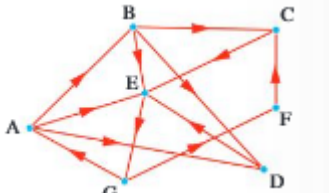
Définition

Un graphe est dit orienté si ses arêtes sont définies par une origine et une extrémité. Généralement une flèche indique le sens du parcours. On parle d'**arcs** plutôt que d'arêtes.

Définition complémentaire :

- L'ordre d'un graphe est le nombre de ses sommets
- Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet, les boucles comptent pour deux.
- Dans un graphe non orienté, la somme des degrés des sommets est égale au double du nombre d'arêtes.

Exemple

	<ol style="list-style-type: none">1. Donner l'ordre ce graphe.2. Donner la liste d'adjacence de chaque sommet3. Donner la matrice d'adjacence de ce graphe.
---	---

III. Représentation des graphes.

On a vu que l'on peut représenter un graphe à partir de sa matrice d'adjacence. On peut aussi travailler autrement.

On peut travailler avec une liste des sommets et pour chacun avoir la liste de ses sommets adjacents. Quelle structure de données semble adaptée ?

Exemple :

On considère un site web avec des liens entre ses différentes pages.

Il y a 4 pages, notées A, B, C, D

Voici les listes d'adjacences :

A → B, C, D

B → A, C

C → A, D

D → A

- 1) Quel est l'ordre de ce graphe ?
- 2) Est-il orienté ou non orienté ?
- 3) Etablir la matrice d'adjacence de ce graphe
- 4) Etablir la liste d'adjacence de ce graphe.
- 5) Ecrire un programme qui permet de compter, en partant aléatoirement d'une page, le nombre de visite de chaque page, après n clics.
- 6) Réaliser avec la bibliothèque networkx le dessin de ce graphe . On partira de la liste d'adjacence.

IV. Pondération

Dans certains cas, on peut associer des données numériques à un graphe , par exemple des kilomètres dans un réseau ferroviaire.

Liaison directe :

Depuis Paris : Toulouse, Marseille, Nîmes.

Depuis Toulouse : Perpignan, Paris, Nîmes.

Depuis Perpignan : Toulouse, Nîmes.

Depuis Marseille : Nîmes.

	Perpignan	Toulouse	Nîmes	Marseille	Paris
Perpignan		206	203	317	845
Toulouse	206		290	403	677
Nîmes	203	290		122	711
Marseille	317	403	122		773
Paris	845	677	711	773	

Comment pourrait-on représenter les données suivantes ?

Etablir une matrice d'adjacence possible.

Trouver une structure de données adaptée à la représentation de ces données.

Construire le graphe relatif à ces données.